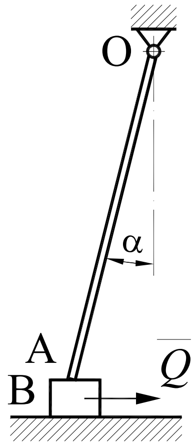
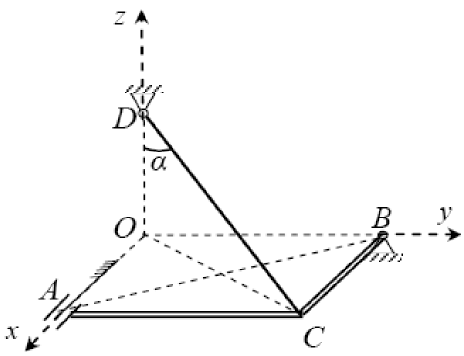
КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2016-2017 навч. рік
Задачі I етапу Всеукраїнської студентської олімпіади з теоретичної механіки

Задача С1 (8 балів)



Однорідний стержень OA довжиною l и масою m_1, шарнірно закріплений в точці O під кутом α до вертикалі і опирається кінцем A на брусок B масою m_2, який лежить на горизонтальній поверхні. Коефіцієнт тертя бруска зі стержнем дорівнює f_1, з поверхнею – f_2. Визначити мінімальне значення горизонтальної, спрямованої як показано на рис. сили Q, яку необхідно прикласти до бруска, щоб зрушити його з місця. При обчисленнях прийняти $f_1=f_2=0.2$; $2m_1=m_2=10$ кг; $\alpha=14^o$ ($tg(\alpha)\approx0.25$).

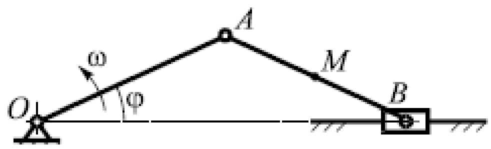
Задача С2 (12 балів)



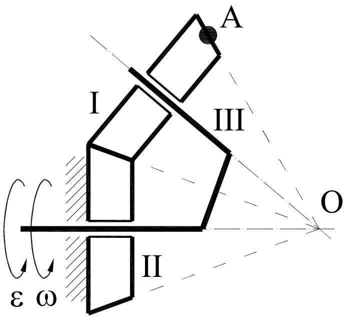
Тонкий однорідний стержень ACB з шарнірами A (циліндричним) та B (сферичним) на кінцях утримується в горизонтальній площині за допомогою невагомої нерозтяжної нитки CD, яка утворює з вертикаллю DO кут α. Обчислити силу натягу нитки в положенні рівноваги, якщо вага стержня P=35 Н, довжина всього стержня l=70 см, а частини AC – 40 см (ACBO – прямокутник), $\alpha=60^o$.

Задача К1 (16 балів)

В кривошипно-повзунному механізмі ланки OA і AB мають однакову довжину. Кривошип OA, положення якого визначається кутом φ (див. рис.), має кутову швидкість ω. Визначити кутове пришвидшення кривошипа, при якому у вказаному положенні механізму вектори швидкості і пришвидшення середньої точки M ланки AB взаємно перпендикулярні.



Задача К2 (24 бали)

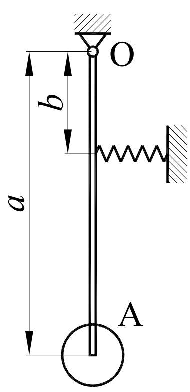


Визначити пришвидшення точки A рухомого усіченого прямого конуса I з середнім радіусом r, який без проковзування перекочується по нерухомому усіченому конусу II, якщо ланка III має в даний момент кутову швидкість ω і кутове пришвидшення ε ($\varepsilon=\omega^2$, див. рис.). Кути при вершині O обох конусів дорівнюють 60^o.

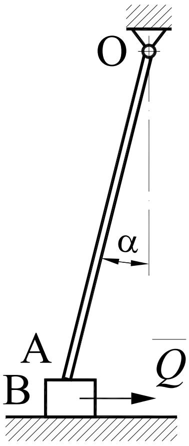
Задача Д1 (16 балів)

Для представленої до задачі С2 розрахункової схеми та вхідних даних визначити кутове пришвидшення стержня ACB в момент обриву нитки CD.

Задача Д2 (24 бали)



Маятник складається з тонкого однорідного стержня довжиною a та масою m, на нижньому кінці якого знаходиться вантаж A, прийнятий за матеріальну точку масою M. До стержня на відстані b від його верхнього кінця O прикріплена пружина (див. рис.) з коефіцієнтом жорсткості c. Вивести рівняння малих коливань маятника.



Задача С1 (8 балів)

Однорідний стержень ОА довжиною l и масою m_1, шарнірно закріплений в точці О під кутом α до вертикалі і опирається кінцем А на брусок В масою m_2, який лежить на горизонтальній поверхні. Коефіцієнт тертя бруска зі стержнем дорівнює f_1, з поверхнею – f_2. Визначити мінімальне значення горизонтальної, спрямованої як показано на рис. сили Q, яку необхідно прикласти до бруска, щоб зрушити його з місця. При обчисленнях прийняти $f_1=f_2=0.2$; $2m_1=m_2=10$ кг; α=14° (tg(α)≈0.25).

Розв'язання

Розкладемо систему на два тіла – стержень ОА (номер 1) і брусок В (номер 2). Зобразимо діючі на них зовнішні сили (рис. 1 і 2). Тут $G_1=m_1 g$ і $G_2=m_2 g$ – ваги стержня і бруска, відповідно; R_{Ox} і R_{Oy} – складові реакції в'язі О; N_1 – нормальна реакція взаємодії бруска зі стержнем; N_2 – нормальна реакція взаємодії бруска з поверхнею; $F_1=N_1\cdot f_1$, $F_2=N_2\cdot f_2$ – сили тертя між тілами.

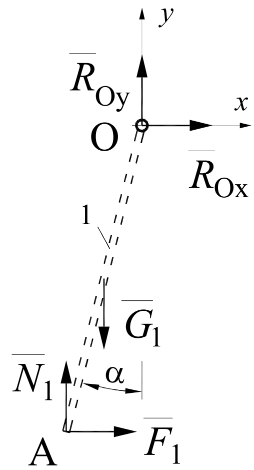


Рис. 1

Складемо рівняння рівноваги для стержня 1 (див. рис. 1):

$$\sum M_O=0:\quad -N_1\cdot l\cdot\sin(\alpha)+F_1\cdot l\cdot\cos(\alpha)+G_1\frac{l}{2}\sin(\alpha)=0,$$

де l=ОА – довжина стержня. Звідки

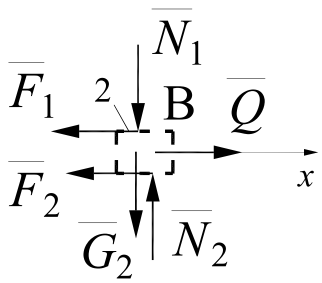


Рис. 2

$$N_1=\frac{G_1\sin(\alpha)}{2\left[\sin(\alpha)-f_1\cos(\alpha)\right]}=\frac{G_1}{2\left[1-f_1\operatorname{ctg}(\alpha)\right]}.$$

Умова рівноваги бруса 2 наступна:

$$\sum Y=0:\quad N_2-N_1-G_2=0\ \Rightarrow\ N_2=N_1+G_2=\frac{G_1}{2\left[1-f_1\operatorname{ctg}(\alpha)\right]}+G_2.$$

$$\sum X=0:\quad Q-F_1-F_2=0\ \Rightarrow\ Q=F_1+F_2=N_1\cdot f_1+N_2\cdot f_2\ \Rightarrow$$

$$Q=\frac{f_1\cdot G_1}{2\cdot\left[1-f_1\cdot\operatorname{ctg}(\alpha)\right]}+f_2\left\{\frac{G_1}{2\cdot\left[1-f_1\cdot\operatorname{ctg}(\alpha)\right]}+G_2\right\}=\frac{(f_1+f_2)\cdot G_1}{2\cdot\left[1-f_1\cdot\operatorname{ctg}(\alpha)\right]}+f_2 G_2.$$

Таким чином

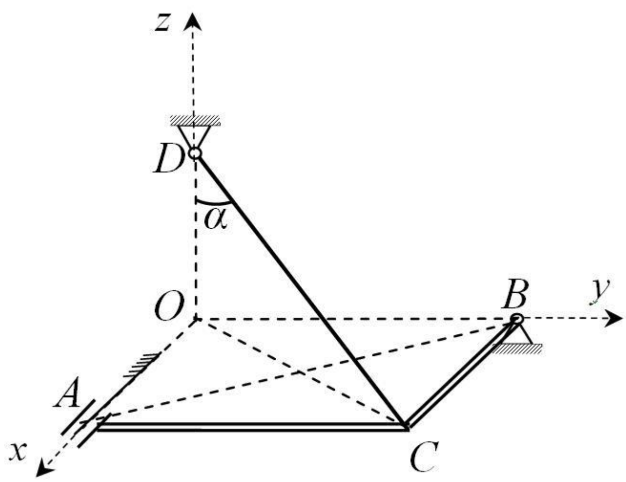
$$Q=\frac{(f_1+f_2)\cdot m_1 g}{2\cdot\left[1-f_1\cdot\operatorname{ctg}(\alpha)\right]}+f_2 m_2 g.$$

При $f_2=f_1=0.2$; $2m_1=m_2=10$ кг ($m_1=5$ кг) і tg(α)=0.25 (ctg(α)=1/tg(α)=4)

$$Q=\frac{(0.2+0.2)\cdot 5\cdot 10}{2\cdot(1-0.2\cdot 4)}+0.2\cdot 10\cdot 10=70\ \text{Н}.$$

Відповідь: 70 Н.

Задача С2 (12 балів)

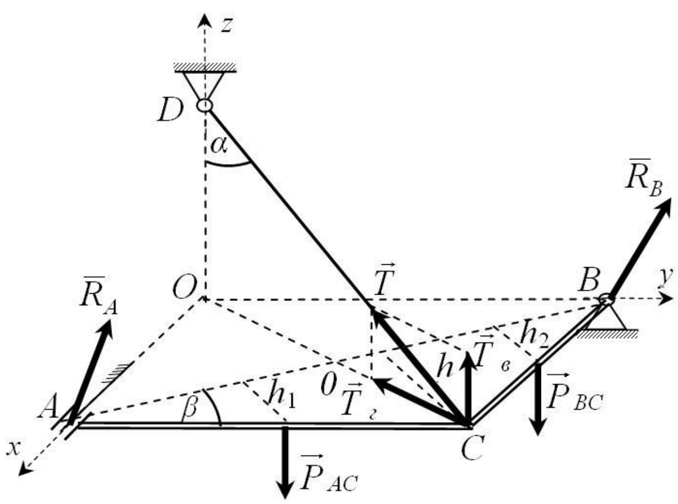


Тонкий однорідний стержень АСВ з шарнірами А (циліндричним) та В (сферичним) на кінцях утримується в горизонтальній площині за допомогою невагомої нерозтяжної нитки CD, яка утворює з вертикаллю DO кут α. Обчислити силу натягу нитки в положенні рівноваги, якщо вага стержня *P*=35 Н, довжина всього стержня *l*=70 см, а частини АС – 40 см (АСВО – прямокутник), α=60º.

Розв'язання

Оскільки стержень однорідний, то ваги його частин АС і ВС можна визначити за формулами – $P_{AC}=\gamma\cdot AC$, $P_{BC}=\gamma\cdot BC$, де $\gamma=P/l=P/(AC+BC)$ – погонна вага стержня[1]. Точки прикладання цих сил ($\vec{P}_{AC}$, $\vec{P}_{BC}$) знаходяться посередині відповідних частин (див. рис.).

Звільняємо стержень від в'язей, замінюючи їх дію відповідними реакціями. Сила $\vec{T}$, з якою стержень утримується невагомою ниткою, спрямована уздовж нитки (див. рис.). Реакції $\vec{R}_A$ й $\vec{R}_B$ шарнірів А і В невідомі як за значенням, так і за напрямом, тому направляємо довільно (при цьому $\vec{R}_A$ розташована у вертикальній площині, яка містить лінію АС).



Очевидно, що стержень може обертатися навколо осі, яка співпада з відрізком *AB*. У положенні рівноваги сума моментів всіх діючих на стержень сил відносно цієї осі має бути рівною нулеві, тобто має виконуватися умова

$$\sum M_{AB}(\vec{P})=0: \; M_{AB}(\vec{R}_A)+M_{AB}(\vec{R}_B)+M_{AB}(\vec{P}_{AC})+M_{AB}(\vec{P}_{BC})+M_{AB}(\vec{T})=0.$$

Для зручності обчислення $M_{AB}(\vec{T})$ силу $\vec{T}$ розкладемо на дві складові – $\vec{T}_г$ в горизонтальній площині і $\vec{T}_в$ у вертикальній (див. рис.). Тоді

$$M_{AB}(\vec{T})=M_{AB}(\vec{T}_г)+M_{AB}(\vec{T}_в).$$

З урахуванням того, що $M_{AB}(\vec{R}_A)=M_{AB}(\vec{R}_B)=M_{AB}(\vec{T}_г)=0$, оскільки лінії дії сил $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ і $\vec{T}_г$ перетинають вісь обертання АВ, отримаємо

---

[1] Під погонною вагою стержня вважається вага 1 м стержня.

$$M_{AB}\left(\vec{P}_{AC}\right)+M_{AB}\left(\vec{P}_{BC}\right)+M_{AB}\left(\vec{T}_в\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$P_{AC}\cdot h_1+P_{BC}\cdot h_2-T_в\cdot h=0. \qquad (1)$$

Тут h_1, h_2, h – відстані від осі до ліній дії сил $\vec{P}_{AC}$, $\vec{P}_{BC}$ та $\vec{T}_в$, відповідно.

Очевидно, що

$$T_в=T\cos\alpha; \quad h_1=\frac{AC}{2}\sin\beta; \quad h_2=\frac{BC}{2}\sin(90°-\beta)=h_1; \quad h=AC\sin\beta=2h_1,$$

де $\beta=\angle BAC$ (див. рис.).

Після підстановки в (1) отримаємо

$$\gamma\cdot AC\cdot h_1+\gamma\cdot BC\cdot h_1-T\cos\alpha\cdot 2h_1=0.$$

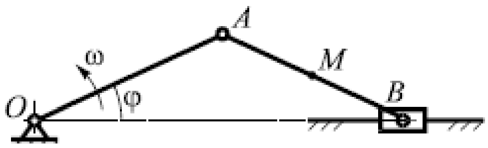
Звідки

$$T=\frac{\gamma\cdot(AC+BC)}{2\cdot\cos\alpha}=\frac{P}{2\cdot\cos\alpha}=\frac{35}{2\cdot\cos 60°}=35 \text{ Н}.$$

Відповідь: 35 Н.

Задача К1 (16 балів)

В кривошипно-повзунному механізмі ланки OA і AB мають однакову довжину.



Кривошип OA, положення якого визначаються кутом φ (див. рис.), має кутову швидкість ω. Визначити значення і напрямок кутового пришвидшення кривошипа, за яких у вказаному положенні механізму вектори швидкості і пришвидшення середньої точки M ланки AB взаємно перпендикулярні.

Розв'язання

Скористаємося координатним способом описування руху точки M. У декартовій системі координат, початок якої співпада з точкою O, координати точки M будуть визначатися наступними виразами:

$$x_{\text{M}}=\text{пр}_{Ox}(\text{OA})+\text{пр}_{Ox}(\text{AM})=1.5\cdot l\cdot\cos\varphi; \quad y_{\text{M}}=\text{пр}_{Oy}(\text{BM})=0.5\cdot l\cdot\sin\varphi.$$

Тут враховано $\angle\text{ABO}=\angle\text{AOB}=\varphi$ (оскільки $\text{OA}=\text{AB}=l$), а запис $\text{пр}_{O\xi}(\text{MN})$ позначає проекцію відрізка (зокрема, MN) на вісь Oξ.

Тоді для проекцій швидкості та пришвидшення точки M на осі *Ox* та O*y* будуть справедливі наступні формули:

$$v_{\text{M}x}=\frac{\text{d}x_{\text{M}}}{\text{d}t}=1.5\cdot l\cdot(-\sin\varphi)\cdot\omega; \quad v_{\text{M}y}=\frac{\text{d}y_{\text{M}}}{\text{d}t}=0.5\cdot l\cdot\cos\varphi\cdot\omega;$$

$$a_{\text{M}x}=\frac{\text{d}v_{\text{M}x}}{\text{d}t}=-1.5\cdot l\cdot\left[(\cos\varphi\cdot\omega)\cdot\omega+\sin\varphi\cdot\varepsilon\right]; \quad a_{\text{M}y}=\frac{\text{d}v_{\text{M}y}}{\text{d}t}=0.5\cdot l\cdot\left[(-\sin\varphi\cdot\omega)\cdot\omega+\cos\varphi\cdot\varepsilon\right]. \qquad (1)$$

Тут враховано, що $\varphi=\varphi(t)$; $\frac{\text{d}\varphi}{\text{d}t}=\omega$; $\frac{\text{d}\omega}{\text{d}t}=\varepsilon$ – кутове пришвидшення OA.

Таким чином швидкість та пришвидшення точки М дорівнюють

$$\vec{v}_{\text{M}} = \vec{i}\cdot v_{\text{M}x} + \vec{j}\cdot v_{\text{M}y}\,; \quad \vec{a}_{\text{M}} = \vec{i}\cdot a_{\text{M}x} + \vec{j}\cdot a_{\text{M}y}\,,$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ – одиничні орти декартової системи координат.

Щоб ці вектори були перпендикулярні необхідно, щоб їх скалярний добуток був рівним нулеві – $\vec{v}_{\text{M}}\cdot\vec{a}_{\text{M}} = 0$. Тобто

$$v_{\text{M}x}\cdot a_{\text{M}x} + v_{\text{M}y}\cdot a_{\text{M}y} = 0\,. \tag{2}$$

Після підстановки (1) в (2) отримаємо

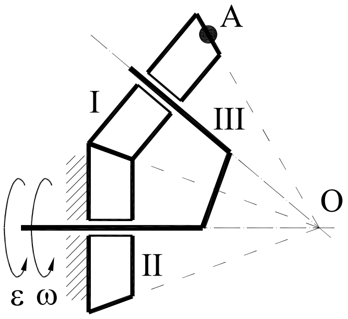
$$2.25\cdot l^2\cdot\omega\cdot\left[(\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\omega)\cdot\omega+\sin^2\varphi\cdot\varepsilon\right]+0.25\cdot l^2\cdot\omega\cdot\left[-\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\omega\cdot\omega+\cos^2\varphi\cdot\varepsilon\right]=0\,.$$

Звідки
$$\varepsilon = -\frac{4\cdot\omega^2\cdot\sin 2\varphi}{1+8\cdot\sin^2\varphi}\,.$$

Знак «–» свідчить, що для зображеного на рис. положення механізму ($\sin 2\varphi > 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon < 0$) ε спрямовано в протилежну від ω сторону.

Відповідь: $\varepsilon = \dfrac{4\omega^2\sin 2\varphi}{1+8\sin^2\varphi}$ і спрямовано протилежно ω.

Задача К2 (24 балів)



Визначити пришвидшення точки А рухомого усіченого прямого конуса I з середнім радіусом *r*, який без проковзування перекочується по нерухомому усіченому конусу II, якщо ланка III має в даний момент кутову швидкість ω і кутове пришвидшення ε ($\varepsilon=\omega^2$, див. рис.). Кути при вершині О обох конусів дорівнюють 60°.

Розв'язання

Зобразимо механічну систему з урахуванням вхідних даних (рис. 1). Оберемо напрямки координатних осей *Ox* і *Oy* так, як показано на рис. 1.

1. Визначення кутової швидкості конуса I. Конус I здійснює сферичний рух. Очевидно, що миттєва вісь його обертання *O*Ω збігається зі спільною твірною конусів і розташована в площині *xOy* (рис. 1).

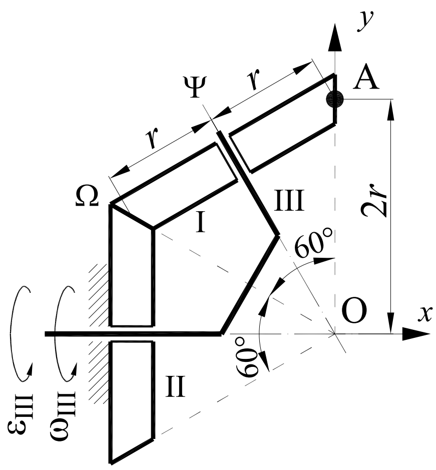


Рис. 1

Кутову швидкість конуса знайдемо шляхом додавання обертань навколо пересічних осей – через побудову паралелограма кутових швидкостей (рис. 2):

$$\vec{\omega}_{\text{I}} = \vec{\omega}_{\text{III}} + \vec{\omega}_{\text{I/III}}\,.$$

Тут ω_{III} – кутова швидкість ланки III (*Ox*); $\vec{\omega}_{\text{I/III}}$ – кутова швидкість конуса I в обертанні навколо власної осі (*O*Ψ).

За теоремою синусів $\dfrac{\sin(120°)}{\omega_{\mathrm{I}}}=\dfrac{\sin(30°)}{\omega_{\mathrm{III}}}$.

Звідки

$$\omega_{\mathrm{I}}=\omega_{\mathrm{III}}\frac{\sin(120°)}{\sin(30°)}=\omega_{\mathrm{III}}\sqrt{3}\,. \tag{1}$$

2. Визначення кутового пришвидшення конуса I. Вектор кутової швидкості конуса I запишемо у вигляді

$$\vec{\omega}_{\mathrm{I}}=\omega_{\mathrm{I}}\cdot\vec{i}_{\Omega}\,,$$

де ω_{I} – модуль вектора $\vec{\omega}_{\mathrm{I}}$; $\vec{i}_{\Omega}$ – орт його напрямку.

Отже, кутове пришвидшення конуса I

$$\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{i}_{\Omega}+\omega_{\mathrm{I}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{i}_{\Omega}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2}$$

Помітимо, що $\dfrac{\mathrm{d}\vec{i}_{\Omega}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}_{\mathrm{III}}\times\vec{i}_{\Omega}$, а з урахуванням напрямку $\vec{\omega}_{\mathrm{III}}$ і $\vec{i}_{\Omega}$ (рис. 3) –

$$\frac{\mathrm{d}\vec{i}_{\Omega}}{\mathrm{d}t}=-\omega_{\mathrm{III}}\sin(30°)\cdot\vec{k}=-0.5\omega_{\mathrm{III}}\cdot\vec{k}\,.$$

Після підстановки в (2)

$$\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{i}_{\Omega}-0.5\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{III}}\cdot\vec{k}=\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,||}+\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,\perp}\,. \tag{3}$$

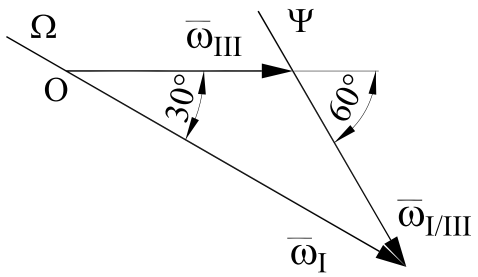


Рис. 2

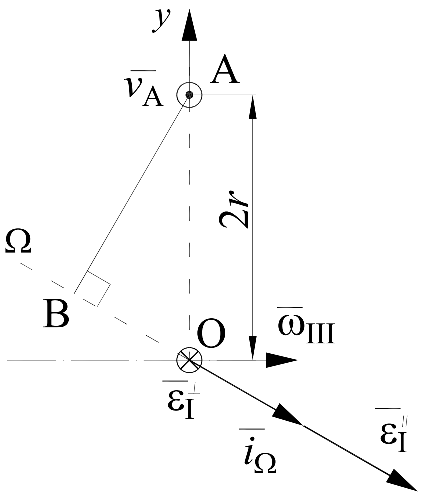


Рис. 3

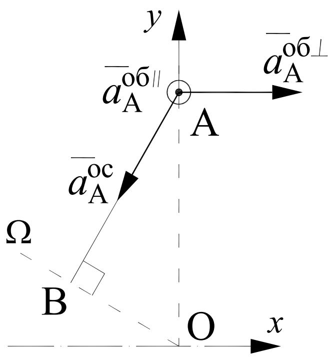


Рис. 4

Вектор $\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,||}=\dfrac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{i}_{\Omega}$ спрямований вздовж миттєвої осі обертання $O\Omega$ і збігається з $\vec{\omega}_{\mathrm{I}}$ (рис. 3). Його модуль з урахуванням (1)

$$\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,||}\right|=\frac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{3}\frac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{III}}}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_{\mathrm{III}}\sqrt{3}\,.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,\perp}=-0.5\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{III}}\cdot\vec{k}$ має протилежний одиничному орту $\vec{k}$ напрямок (рис. 3). Його модуль на підставі (1) дорівнює

$$\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,\perp}\right|=0.5\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{III}}=0.5\sqrt{3}\omega_{\mathrm{III}}^{2}\,.$$

3. Визначення швидкості точки А. Швидкість точки А визначаємо як обертальну навколо миттєвої осі $O\Omega$ –

$$\vec{v}_{\mathrm{A}}=\vec{\omega}_{\mathrm{I}}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}. \qquad (4)$$

Вектори $\vec{\omega}_{\mathrm{I}}$ та $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ розташовані в площині xOy. Отже, вектор $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ паралельний осі Oz (див. рис. 2 і 3) Модуль швидкості

$$v_{\mathrm{A}}=\omega_{\mathrm{I}}\cdot\mathrm{OA}\cdot\sin\left(\widehat{\vec{\omega}_{\mathrm{I}},\overrightarrow{\mathrm{OA}}}\right)=2r\omega_{\mathrm{III}}\sqrt{3}\sin(120°)=3r\omega_{\mathrm{III}}. \qquad (5)$$

4. Визначення пришвидшення точки А. Пришвидшення точки А знаходимо як геометричну суму доосьового та обертального пришвидшень:

$$\vec{a}_{\mathrm{A}}=\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{ос}}+\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}}.$$

Доосьове пришвидшення $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{ос}}=\vec{\omega}_{\mathrm{I}}\times\vec{v}_{\mathrm{A}}$.

Воно спрямовано вздовж перпендикуляра до миттєвої осі обертання (рис. 4).

Модуль доосьового пришвидшення

$$a_{\mathrm{A}}^{\text{ос}}=\omega_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{A}}\sin(90°)=\omega_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{A}},$$

або з урахуванням (1) і (5) $a_{\mathrm{A}}^{\text{ос}}=\omega_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{A}}=3\sqrt{3}r\omega_{\mathrm{III}}^2$.

Обертальне пришвидшення $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}}=\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,

або, з урахуванням (3), $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}}=\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}||}+\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}\perp}$,

де

$$\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}||}=\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,||}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}};\quad \vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}\perp}=\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,\perp}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}. \qquad (6)$$

Порівнюючи (4) з (6) і враховуючи, що напрями $\vec{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{\,||}$ і $\vec{\omega}_{\mathrm{I}}$ збігаються, маємо, що напрями $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}||}$ і $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ теж співпадають (рис. 4). Модуль цієї складової

$$a_{\mathrm{A}}^{\text{об}||}=\varepsilon_{\mathrm{I}}^{||}\cdot\mathrm{OA}\cdot\sin(120°)=3r\varepsilon_{\mathrm{III}}.$$

Вектор $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}\perp}$ збігається з віссю Ox (рис. 4). Його модуль

$$a_{\mathrm{A}}^{\text{об}\perp}=\varepsilon_{\mathrm{I}}^{\perp}\cdot\mathrm{OA}\cdot\sin(90°)=r\sqrt{3}\omega_{\mathrm{III}}^2.$$

Пришвидшення точки А знайдемо як геометричну суму трьох складових:

$$\vec{a}_{\mathrm{A}}=\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{ос}}+\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}||}+\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}\perp}$$

Вектори $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{ос}}$ та $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}\perp}$ розташовані в площині Oxy, а вектор $\vec{a}_{\mathrm{A}}^{\,\text{об}||}$ перпендикулярний їм (рис. 4). Тому модуль пришвидшення точки А

$$a_{\mathrm{A}}=\sqrt{\left[\left(a_{\mathrm{A}}^{\text{ос}}\right)^2+2a_{\mathrm{A}}^{\text{ос}}a_{\mathrm{A}}^{\text{об}\perp}\cos(120°)+\left(a_{\mathrm{A}}^{\text{об}\perp}\right)^2\right]+\left(a_{\mathrm{A}}^{\text{об}||}\right)^2}=r\sqrt{21\omega_{\mathrm{III}}^4+9\varepsilon_{\mathrm{III}}^2}.$$

З урахуванням вхідних даних ($\omega_{\mathrm{III}}=\omega;\ \varepsilon_{\mathrm{III}}=\varepsilon=\omega^2$)

$$a_{\mathrm{A}}=r\omega^2\sqrt{30}.$$

Відповідь: $a_{\mathrm{A}}=r\omega^2\sqrt{30}$.

Задача Д1 (16 балів)

Для представленої до задачі С2 розрахункової схеми та вхідних даних визначити кутове пришвидшення стержня АСВ в момент обриву нитки CD.

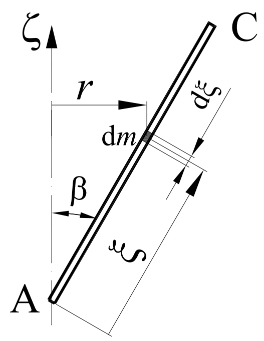
Розв'язання

За відсутності нитки CD в'язі A і B допускають обертання стержня навколо осі ζ, яка проходить через точки A і B. З урахуванням того, що момент інерції стержня відносно цієї осі постійний ($J_\zeta = \text{const}$) та $\dot{\omega}_\zeta = \varepsilon_\zeta$ на підставі теореми про зміну кінетичного моменту отримаємо

$$J_\zeta \cdot \varepsilon_\zeta = M_\zeta .$$

Очевидно, що тут $J_\zeta = J_{AC} + J_{BC}$, де J_{AC}, J_{BC} – моменти інерції відповідних частин стержня (AC і CB). Обчислимо J_{AC}. В даному випадку, згідно до означення для моменту інерції, $J_{AC} = \int_l r^2 \mathrm{d}m$, де r – відстань до осі обертання елементарної маси $\mathrm{d}m$ стержня (див. рис.). Оскільки $r = \xi \cdot \sin(\beta)$ (див. рис.), $\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}\xi$ ($\rho = M/l$ – погонна маса стержня; $M = P/g$, $l = AB + BC$ – маса та довжина стержня), то

$$J_{AC} = \rho \sin^2(\beta) \int_0^{AC} \xi^2 d\xi = \frac{P}{gl} \sin^2(\beta) \frac{AC^3}{3} .$$



Аналогічно отримаємо вираз для моменту інерції J_{BC} –

$$J_{BC} = \frac{P}{gl} \cos^2(\beta) \frac{BC^3}{3} .$$

Тут враховано, що частина BC складає з віссю ζ кут $90° - \beta$, а $\sin^2(90° - \beta) = \cos^2(\beta)$.

Таким чином

$$J_\zeta = \frac{P}{gl} \sin^2(\beta) \frac{AC^3}{3} + \frac{P}{gl} \cos^2(\beta) \frac{BC^3}{3} = \frac{P}{3gl} AC^3 \sin^2(\beta)\bigl(1 + \mathrm{tg}(\beta)\bigr) .$$

Сума моментів M_ζ діючих на стержень зовнішніх сил відносно осі ζ на підставі отриманих у задачі С2 співвідношень дорівнює

$$M_\zeta = M_{AB}\left(\vec{P}_{AC}\right) + M_{AB}\left(\vec{P}_{BC}\right) = \gamma \cdot AC \cdot h_1 + \gamma \cdot BC \cdot h_1 = \gamma \cdot (AC + BC) \cdot h_1 = P \frac{AC}{2} \sin\beta .$$

Звідки

$$\varepsilon_\zeta = \frac{M_\zeta}{J_\zeta} = \frac{P(AC/2)\sin\beta}{(P/3gl)AC^3 \sin^2(\beta)\bigl(1 + \mathrm{tg}(\beta)\bigr)} = \frac{3gl}{2AC^2 \sin(\beta)\bigl(1 + \mathrm{tg}(\beta)\bigr)} .$$

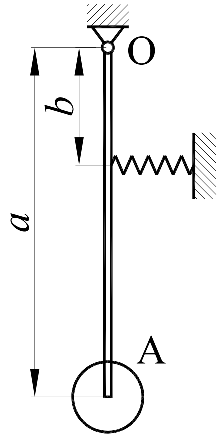
Тут $\sin\beta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}}$; $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{BC}{AC}$; $BC = l - AC$ (див. рис. до задачі С2).

Після підстановки значень

$$BC=0.07-0.04=0.03 \text{ м}; \quad \sin\beta=\frac{0.03}{\sqrt{0.04^2+0.03^2}}=0.6; \quad \mathrm{tg}\beta=\frac{0.03}{0.04}=0.75;$$

$$\varepsilon_\zeta \approx \frac{3\cdot 10\cdot 0.07}{2\cdot 0.04^2\cdot 0.6\cdot(1+0.75)}=625 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: 625 рад/с^2



Задача Д2 (24 балів)

Маятник складається з тонкого однорідного стержня довжиною a та масою m, на нижньому кінці якого знаходиться вантаж А, прийнятий за матеріальну точку масою M. До стержня на відстані b від його верхнього кінця О прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості c (див. рис.). Вивести рівняння малих коливань маятника.

Розв'язання

Для виведення диференціального рівняння руху маятника скористаємося рівнянням Лагранжа ІІ-го роду. За узагальнену координату даної механічної системи приймемо кут φ відхилення його від положення рівноваги (система має один ступінь вільності). В результаті рівняння Лагранжа прийме вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q.$$

Кінетична енергія системи T дорівнює сумі кінетичних енергій стержня ОА і вантажу А:

$$T=T_{\mathrm{OA}}+T_{\mathrm{A}}=\frac{J_0\omega^2}{2}+\frac{Mv_{\mathrm{A}}^2}{2}.$$

де $J_0=ma^2/3$ – момент інерції стержня відносно осі обертання О; $v_{\mathrm{A}}=a\omega$ – швидкість точки А. З урахуванням рівності $\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot\varphi$ отримаємо

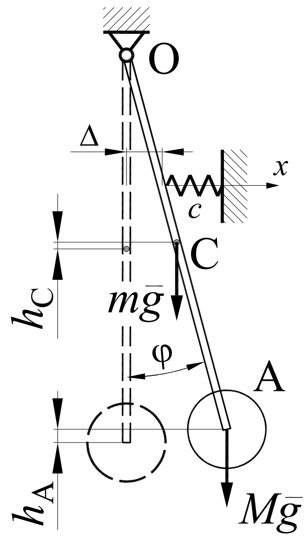
$$T=\frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}\dot\varphi^2+\frac{M(a\dot\varphi)^2}{2}=\frac{(m+3M)a^2}{6}\dot\varphi^2.$$

Звідки

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{(m+3M)a^2}{3}\dot\varphi; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)=\frac{(m+3M)a^2}{3}\ddot\varphi. \tag{1}$$

Узагальнена сила визначається за формулою $Q=-\partial\Pi/\partial\varphi$, де Π – потенціальна енергія механічної системи. У даному випадку ця енергія обчислюється як сума потенціальних енергій сил тяжіння ($m\overline{g}$ і $M\overline{g}$) і потенціальної енергії сили пружності пружини ($c\Delta$). При відхиленні маятника від вертикального положення на малий кут φ центри ваги його елементів отримують вертикальні переміщення на h_{C} й h_{A}, а пружина деформується на Δ (див. рис.), тому

$$\Pi = mgh_C + Mgh_A + \frac{c\Delta^2}{2},$$



де $h_C = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}a\left(1-\cos\varphi\right)$; $\quad h_A = a\left(1-\cos\varphi\right)$; $\quad \Delta = b\cdot\sin\left(\varphi\right)$.

Обмежуючись малими коливаннями ($\varphi \to 0$), маємо

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\left(\varphi/2\right) \approx 2\left(\varphi/2\right)^2 = \varphi^2/2; \quad \sin\left(\varphi\right) = \varphi.$$

Тоді

$$\Pi = \left[ga\left(\frac{m}{2}+M\right)+cb^2\right]\frac{\varphi^2}{2}.$$

Звідси знаходимо узагальнену силу –

$$Q = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -\left[ga\left(\frac{m}{2}+M\right)+cb^2\right]\varphi. \tag{2}$$

Підставивши співвідношення (1) і (2) у рівняння Лагранжа отримаємо шукане диференціальне рівняння малих вільних коливань даної механічної системи

$$\left(\frac{m}{3}+M\right)a^2\ddot{\varphi} + \left[ga\left(\frac{m}{2}+M\right)+cb^2\right]\varphi = 0,$$

або у вигляді $\qquad \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad k = \sqrt{\dfrac{ga\left(m/2+M\right)+cb^2}{\left(m/3+M\right)a^2}}.$

Відповідь: $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad k = \sqrt{\dfrac{ga\left(m/2+M\right)+cb^2}{\left(m/3+M\right)a^2}}$